

# Einige offene Fragen der Metallplastizität

Mahrenholtz, O.  
Wilmanski, K.

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 42, 1990/91,  
S.27-41



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

## **Einige offene Fragen der Metallplastizität**

Von **O. Mahrenholtz und K. Wilmanski**, Hamburg-Harburg\*)

(Vorgelegt in der Klasse für Ingenieurwissenschaften am 13. Dezember 1991)

(Eingegangen am 21. 8. 1990)

### **1. Vorbemerkungen**

Plastische Verformungen der Metalle und ihre praktische Bedeutung wurden mit aller Wahrscheinlichkeit viel früher entdeckt als alle anderen mechanischen Vorgänge in Werkstoffen – die Bearbeitung der Bronze wurde nur durch solche Verformung möglich! Trotzdem sind die theoretischen Fragen und Methoden der Plastizität bis heute nicht endgültig beantwortet.

Im August 1924 berichtete Prandtl beim ersten internationalen Kongreß für angewandte Mechanik in Delft: „Die Spannungsverteilung in plastischen Körpern kann zur Zeit hauptsächlich in denjenigen Körpern angegeben werden, die unter einer gleichbleibenden Schubspannung fließen“. Von demselben Kongreß berichtete Nadai: „In der Festigkeitslehre macht sich, soweit die Metalle in Betracht gezogen werden, das Eindringen der Metallkunde mit allen ihren Hilfsverfahren immer mehr bemerkbar. Die Aufzeichnung einer Anzahl von mehr oder weniger willkürlich herausgegriffenen Erfahrungstatsachen und Größen, die hier in der ersten Zeit der Entwicklung die Grundlage für die Metallbewertung bildete, scheint allmählich den physikalischen Prüfungsverfahren zu weichen, die eine mehr objektive Bewertung anbahnen, indem sie allen Vorgängen bei Formänderungen und beim Bruch nachgehen“. (VDI, **68**, 32, S. 825, 1924).

Seitdem sind 65 Jahre vergangen, und die moderne Plastizitätstheorie hat die optimistischen Feststellungen von Nadai immer noch nicht erfüllt. Weder die grundlegenden Begriffe, wie die plastische Verzerrung, die Verfestigung, die plastische Energiedissipation usw., noch die Lösungen der Kontinuumstheorie für heterogene Verformungen sind bis heute zufriedenstellend verfügbar.

Zusätzlich erscheinen die Probleme der großen Verformungen, die bei Metallumformung auftauchen. Diese Probleme vermehren – auf einer Seite – die mathematischen Schwierigkeiten, aber – auf der anderen Seite – öffnen sie auch neue Möglichkeiten der gezielten Verfahren, um gewünschte mechanische Anisotropie (Texturen!) zu erzeugen.

---

\*) Während der Drucklegung dieser Arbeit starb Professor Dr.-Ing. Dr. E. h. Johannes Theodor Lehmann am 29. August 1991. Ihm, einem Pfadfinder der modernen Plastizitätstheorie, widmen wir die Untersuchung.

Wir versuchen in dieser Arbeit die wichtigsten Fragen der modernen Plastizitätstheorie zu formulieren und einige Teilantworten auf diese Fragen anzudeuten. Jedoch Probleme wie Mehrphasigkeit (z.B. Metallkeramiken) werden in dieser Arbeit überhaupt nicht berührt. Auch die Modellbildung für nicht-metallische Werkstoffe wird vollständig vernachlässigt.

## 2. Plastische Verzerrung

Um den Umfang der Plastizitätstheorie zu definieren, muß man den Begriff der **plastischen Verzerrung** verfügbar haben. Durch den Vergleich der im Zugversuch erhaltenen **elastischen** und **nichtelastischen** Verhaltensweisen neigt man zur Aussage, daß Verzerrungen, die man durch Entlastung rückgängig machen kann, elastisch, und Verzerrungen, die selbst nach vollständiger Entlastung noch verbleiben, plastisch sind [1]. Zwei schematisierte Beispiele von Zugversuchen werden in Abbildung 1 gezeigt, wobei  $K$  die Zugkraft und  $l_0$  die Anfangslänge der Probe sind und die Pfeile längs der Diagramme den Beanspruchungsweg andeuten. Im Sinne der obigen Definition würde der Punkt C beider Kurven die plastische Verzerrung bestimmen.

Es ist sehr einfach einzusehen, daß diese Feststellung nur sehr selten unseren physikalischen Erwartungen entspricht. Um diesen Punkt zu klären, betrachten wir zuerst das Diagramm a). Die Abbildung 2 zeigt die schematisierten Zugversuchsergebnisse für zwei verschiedene Werkstoffe, wenn wir die Dehnung der Probe etwas weiter als bis zum Punkt B durchführen. Im Fall a) versagt die Probe im Punkt D, während im Fall b) ein zweiter „elastischer“ Zweig B–D beobachtet werden kann! Solche Vorgänge wer-

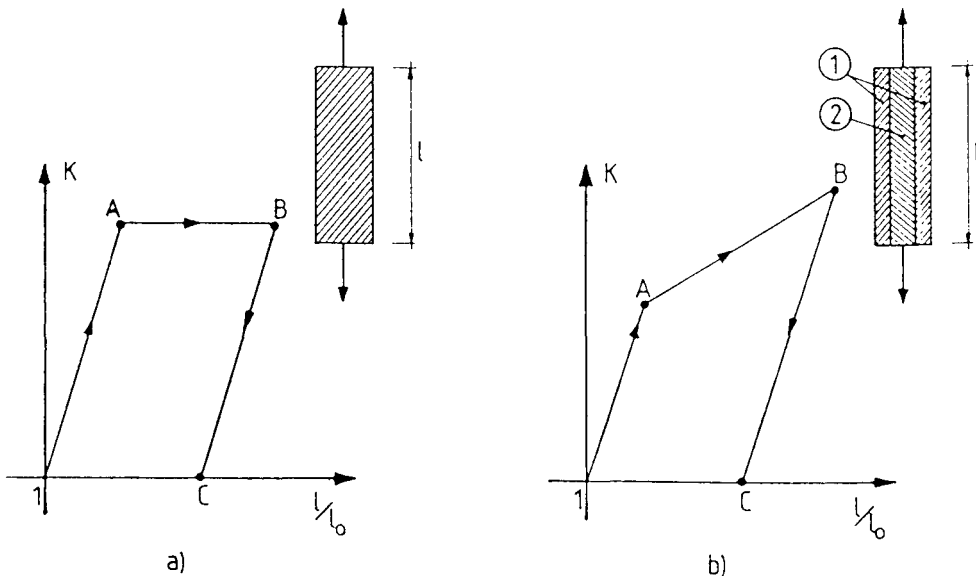


Abbildung 1

den beobachtet, wenn die Restverformung der Abbildung 1a) durch Phasenübergänge (z.B. Martensit  $\rightarrow$  Martensit bei Metallegierungen [2] oder Dehnungskristallisation bei Kunststoffen [3]) verursacht wird.

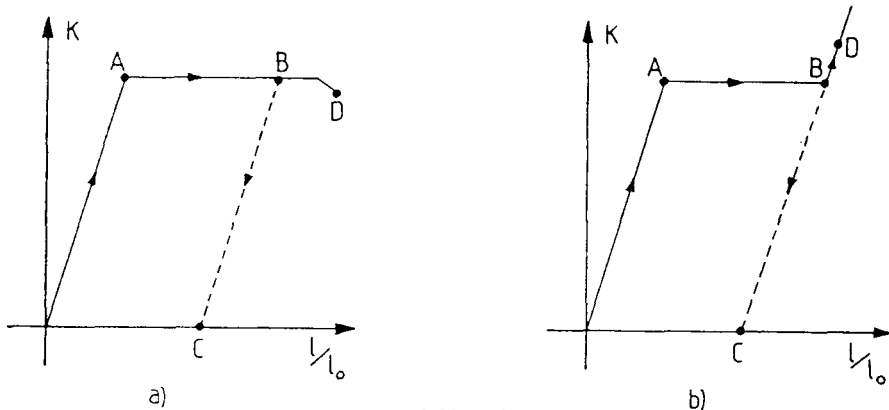


Abbildung 2

Die Lage ist noch verwirrender im Fall b) der Abbildung 1. Nehmen wir an, daß die Probe aus zwei verschiedenen Werkstoffen besteht: dem äußeren aus dem Material 1 und dem inneren aus dem Material 2, deren Fließgrenzen ungleich sind. Man kann einfach feststellen, daß die beiden Werkstoffe bis zum Punkt A elastisch gedehnt werden, daß zwischen den Punkten A und B das eine Material, sagen wir 1, plastisch und das andere elastisch verformt wird und, schließlich, daß die Entlastung B–C wieder elastisch verläuft. Wegen des Zwanges der gemeinsamen Verformung wird die bleibende Verformung im Punkt C **kleiner** als die wirkliche plastische Verformung des Materials 1. Die beiden Teile der Probe werden im Punkt C zusätzlich elastisch verformt, um die geometrischen Zwangsbedingungen zu erfüllen. Das bedeutet, daß der Zustand C nicht spannungsfrei sein kann und daß die Fläche der Hysteresenschleife die Energie-dissipation nicht widerspiegelt. Dieses Beispiel gibt den Tatbestand für mikroskopisch heterogene Werkstoffe (z. B. Vielkristalle) sehr gut wieder.

Die obigen Beispiele führen unmittelbar zu den folgenden Fragen:

1. Frage: Was sind die elastischen und plastischen Verzerrungen?
2. Frage: Kann man sie messen?
3. Frage: Was bedeuten die experimentellen Spannungs-Dehnungskurven?
4. Frage: Kann man solche Werkstoffeigenschaften wie die Fließgrenze, die Verfestigung oder die Energiedissipation in makroskopischen Versuchsverfahren bestimmen?
5. Frage: Welche Rolle spielen die Rückspannungen (d. h. die Spannungen, die nach vollständiger äußerer Entlastung im Werkstoff bleiben) bei der Entstehung makroskopischer Restverformungen?

Es ist offensichtlich, daß die Antwort auf diese Fragen eine umfangreiche Kenntnis der **Mikrostrukturen** verlangt. Selbstverständlich gibt es viele technisch sehr wichtige Prozesse, wie die statische Beanspruchung der Konstruktionselemente oder einige Umformprozesse, wo die genaue Kenntnis des Prozeßverlaufes nicht erforderlich ist. Deswegen wurde die klassische Plastizitätstheorie des 19. Jahrhunderts so erfolgreich. Manchmal kann man auch vernünftige praktische Ergebnisse mit zusätzlichen Annahmen bekommen. Um ein Beispiel zu nennen: Die Annahme der sogenannten starren Plastizität bei Berechnung von Umformungen zeigt, daß man die latente Energie [4] (d.h. die elastische Energie der Rückspannungen) vernachlässigen kann.

Die oben erwähnten Gründe veranlassen die Folgerung, daß weder die elastische Verzerrung noch die plastische Verzerrung makroskopisch definierbar sind. Man soll die beiden Begriffe mit Hilfe der mikroskopischen Eigenschaften des Werkstoffes einführen. Das ist auch unsere Stellungnahme in dieser Arbeit. Wir betrachten die vollständige makroskopische Verformung als eine meßbare Größe, die man auf die makroskopisch unmeßbare elastische und plastische Verzerrung aufteilen kann. In diesem Sinne werden die plastischen Verzerrungen in der Modellbildung als **innere Variablen** betrachtet.

Man soll es klar machen, daß die unmittelbare Betrachtung der plastischen Verzerrung als eine innere Variable nicht der klassischen Vorstellung von solchen Variablen entspricht: im Großen und Ganzen werden, in diesem Fall, die plastischen Verzerrungen makroskopisch kontrollierbar, aber nicht meßbar. Das widerspricht der Interpretation von J. KESTIN und J. BATAILLE [6], und, teilweise, der von P.W. BRIDGMAN\*) [5], der den Begriff der inneren Variablen in der Kontinuumsthermodynamik eingeführt hat. Wir werden weiter sehen, daß die Änderung der plastischen Verzerrung mit makroskopischen Spannungen thermodynamisch gekoppelt ist.

Die Kinematik der Kontinuumsplastizität beruht auf der Annahme, daß die Bewegung der einzelnen Punkte  $\mathbf{X}$  („Körperteilchen“) des Körpers  $B$  durch eine zweimal differenzierbare Bewegungsfunktion  $\chi$  beschrieben werden kann:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in B, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1)$$

wo  $\mathbf{x}$  den Ort in dem Euklidischen Bewegungsraum  $\mathbb{R}^3$  und  $t$  die Zeitkoordinate bezeichnen.

Dann entspricht der infinitesimalen Änderung des materiellen Punktes  $\mathbf{X}$ ,

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + d\mathbf{X}, \quad (2.2)$$

die Änderung des Ortes  $\mathbf{x}$ :

---

\*) „I believe that in general the analysis of such systems (i.e. systems undergoing irreversible processes) will be furthered by the recognition of a new type of large-scale thermodynamic parameter of state, namely the parameter of state which can be **measured** but **not controlled**. Examples are the order-disorder rearrangements in mixed crystals, measurable by X-rays and the dislocations in a solid, measurable by the attenuation of supersonic vibrations. These parameters are measurable, but they are not controllable, which means that they are coupled to no external force variable which might provide the means of control“ [5].

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad \det \mathbf{F} > 0, \quad (2.3)$$

wo die Matrix  $\mathbf{F}$ , **Deformationsgradient** genannt, durch die folgende Beziehung definiert wird:

$$\mathbf{X} = \text{Grad } \chi. \quad (2.4)$$

Die Funktion (2.1) definiert auch die **Geschwindigkeit** und die **Beschleunigung** des Teilchens  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Die Bewegung des materiellen Vektors  $d\mathbf{X}$  (2.3) wird jetzt in zwei Teile gespalten [7] (siehe Abb. 3),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{A}, \quad (2.6)$$

wo  $\mathbf{F}^e$  die Matrix der **elastischen Verzerrung** und  $\mathbf{A}$  die Matrix der **plastischen Verzerrung** bedeuten. Diese Aufspaltung wurde in der Zwischenzeit durch zahlreiche Forschungsarbeiten untermauert. Die Transformation

$$d\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A} d\mathbf{X}$$

wird in der Literatur häufig doch irrtümlich mit einer entlasteten Konfiguration des Körpers indentifiziert. Das Beispiel von Abb. 1b) beweist eindeutig, daß die Konfiguration ohne äußere Beanspruchung nicht der elastisch unverformten Konfiguration ( $\mathbf{F}^e = \mathbf{1}$ ) entspricht. Vielmehr, solche Konfigurationen existieren in keiner wirklichen Bewegung des Körpers.

Um die geometrischen und kinematischen Eigenschaften des Körpers zu beschreiben, brauchen wir, im Sinne der obigen Bemerkungen, zwei Felder:

- das Vektorfeld  $\chi$  (3 Komponenten),
- das Tensorfeld  $\mathbf{A}$  (9 Komponenten).

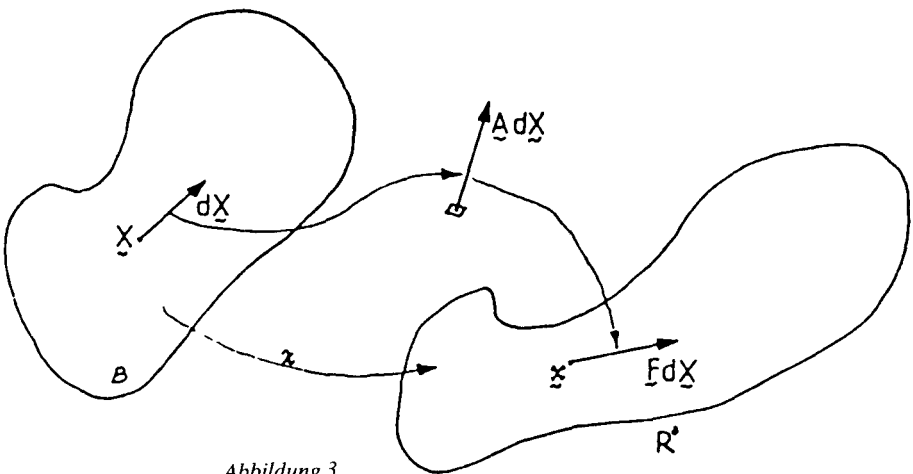


Abbildung 3

Das Vektorfeld  $\chi$  ist makroskopisch meßbar (die Verschiebung!), während das Tensorfeld  $\mathbf{A}$  das Feld der makroskopisch unmeßbaren inneren Variablen ist.

### 3. Thermodynamische Grundlagen

Kontinuumsplastizität muß so aufgebaut werden, daß die Grundgesetze der Kontinuumsmechanik nicht verletzt werden. Im Fall eines einkomponentigen Modells gelten die folgenden Erhaltungssätze:

– Masse

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

– Impuls

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) = \varrho \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

– Energie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \varrho (\mathbf{v}^2 + \varepsilon) \right] + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{2} \varrho (\mathbf{v}^2 + \varepsilon) \mathbf{v} + \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \right] = \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \varrho r. \quad (3.3)$$

Hierin bedeuten:

$\varrho$  – Massendichte,  $\boldsymbol{\sigma}$  – Cauchyscher Spannungstensor,  $\mathbf{f}$  – äußere Kraft pro Masseneinheit,  $\varepsilon$  – innere Energie,  $\mathbf{q}$  – Wärmeflußvektor,  $r$  – Energiezufuhr pro Masseneinheit.

Dabei sind alle Größen als Funktionen des Ortes  $\mathbf{x}$  und der Zeit  $t$  zu betrachten. Der Operator  $\operatorname{div}$  bezeichnet das Skalarprodukt des räumlichen Gradienten

mit dem danach folgenden Objekt  $\operatorname{grad} := \mathbf{F} \operatorname{Grad}$  (3.4)

Die Lösung der Massenbilanzgleichung lautet

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{J}, \quad J := \det \mathbf{F}, \quad (3.5)$$

wo  $\varrho_0$  die Massendichte der unverformten Konfiguration ( $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ ) bezeichnet.

Die übrigen Gleichungen lassen sich schreiben

$$\begin{aligned} \varrho \mathbf{a} &= \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{f}, \quad \mathbf{a} := \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}, \\ \varrho \dot{\varepsilon} &= \operatorname{Spur}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \varrho r, \quad \dot{\varepsilon} := \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \varepsilon, \\ \mathbf{L} &:= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \equiv \operatorname{grad} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei  $\mathbf{T}$  die Matrixtransformierung bezeichnet.

Um die Gleichungen (3.6) als Feldgleichungen für die geometrischen Felder  $\chi$  und  $\mathbf{A}$  und für das Temperaturfeld  $T$  zu nutzen, müssen die sogenannten konstitutiven Gesetze beigelegt werden. Man kann, zum Beispiel, setzen

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma(\mathbf{C}^e, \mathbf{A}, T), \quad \mathbf{C}^e := \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e, \\
\varepsilon &= \varepsilon(\mathbf{C}^e, \mathbf{A}, T), \\
\mathbf{q} &= -\mathbf{K}(\mathbf{C}^e, \mathbf{A}, T) \operatorname{grad} T,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

wo  $\mathbf{C}^e$  den Cauchy-Greenschen Verformungstensor bezeichnet und  $\mathbf{K}$  die Wärmeleitung ist. Die detaillierte Gestalt der Funktionen in (3.7) hängt von der Wahl des Werkstoffes ab.

Es ist offensichtlich, daß die vier Gleichungen (3.6) zusammen mit (3.7) nicht ausreichen, um die unbekannten dreizehn Felder  $(\chi, \mathbf{A}, T)$  zu beschreiben. Die klassische Plastizitätstheorie enthält zusätzlich eine Gleichung, die den Zuwachs der plastischen Verzerrung wiedergibt (z.B. Prandtl-Reuss Gleichung). Für große Verformungen werden auf Grund der Kenntnis der Mikrostruktur, die die Entwicklung der inneren Variablen bestimmt, verschiedene Erweiterungen angeboten, und es wird angenommen, daß diese, im Fall der aktiven Prozesse (d.h. für veränderliche plastische Verzerrung), die Gestalt der Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{a}(\mathbf{C}^e, \mathbf{A}, T) \tag{3.8}$$

haben.

Phänomenologische Versuche, die Funktion  $\mathbf{a}$  zu spezifizieren, sind bis jetzt sehr selten (z.B. [9], [10]). Ausreichend wurden nur solche Prozesse untersucht, die eine gemeinsame Drehung der Spannungshauptachsen und der plastischen Verzerrungen bewirken. In diesem Fall kann man die rechte Seite der Gleichung (3.8) aus der Fließregel mit Hilfe der sogenannten Normalitätsregel bestimmen. Erforderlich ist dann auch eine gewisse Homogenität der plastischen Verzerrung.

Andererseits wurden die **strukturellen** Ansätze für die Funktion  $\mathbf{a}$  sehr gründlich erörtert. Es werden einige auf diesem Gebiet erzielte Ergebnisse in dieser Arbeit gezeigt.

Unabhängig von einer detaillierten Form der Gleichung (3.8) kann die thermodynamische Zulässigkeit der konstitutiven Gleichungen festgestellt werden. Nämlich, nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, muß jede Lösung der Feldgleichungen folgende Entropieungleichung **identisch** erfüllen,

$$\varrho \dot{\eta} + \operatorname{div} \mathbf{h} \geq 0, \quad \eta = \eta(\mathbf{C}^e, \mathbf{A}, T), \quad \mathbf{h} = -\mathbf{H}(\mathbf{C}^e, \mathbf{A}, T) \operatorname{grad} T, \tag{3.9}$$

mit  $\eta$  als Entropiedichte und  $\mathbf{h}$  als Entropieflußvektor.

Die Auswertung dieser Bedingung führt zu den Beziehungen [8]

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \sigma = 2\varrho \mathbf{F}^e \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}^e} \mathbf{F}^{eT}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{K}}{T}, \quad \mathbf{K} \geq 0, \\
w^p &:= \operatorname{Spur} \sigma \mathbf{L}^{pT} \geq \operatorname{Spur} \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{a}^T,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

wo  $\psi$  die Helmholtzsche freie Energie bezeichnet,

$$\psi := \varepsilon - T\eta = \psi(\mathbf{C}^e, \mathbf{A}, T), \tag{3.11}$$

und  $\mathbf{L}^p$  die Geschwindigkeit der plastischen Verzerrung  $\mathbf{A}$  ist:



$$\mathbf{L}^p := \mathbf{F}^e \mathbf{a} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}^e. \quad (3.12)$$

Offensichtlich ist die Ungleichung (3.10)<sub>5</sub> für die plastische Leistung  $w^p$  viel schwächer als üblicherweise angenommen. Das beantwortet teilweise die

6. *Frage*: Sind plastische Verzerrungen, deren Leistung negativ ist, thermodynamisch zulässig (siehe: [11])?

Die rechte Seite dieser Ungleichung steht in enger Verbindung mit der Anwesenheit der Rückspannung und dem Bauschinger Effekt.

Am Ende des Kapitels stehe die wichtigste offene Frage der phänomenologischen Plastizität:

7. *Frage*: Welche Gestalt soll die konstitutive Gleichung für die Geschwindigkeit der plastischen Verzerrung  $\mathbf{L}^p$  haben?

In den zwei folgenden Kapiteln wird eine Teilantwort aus der strukturellen Sicht versucht.

#### 4. Strukturelle Einkristallplastizität

Im Rahmen der Metallphysik wurde die Bewegung von Versetzungen auf sogenannten **kristallographischen Gleitebenen** als die wichtigste Ursache der plastischen Verzerrungen festgestellt. Diese Bewegung hängt mit der Schubspannung  $\tau^{(\alpha)}$  auf der  $\alpha$ -Gleitebene zusammen. Die Gleitgeschwindigkeit ist von der Temperatur abhängig, weil die Versetzungen, die diese Bewegung geometrisch realisieren, verschiedene Hindernisse überwinden müssen. Die einfachste Annahme, die diesen Sachbestand beschreibt, ist das Arrhenius-Gesetz [12]

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \Gamma^{(\alpha)} \exp \left[ - \frac{\Delta G}{kT} \right], \quad \Delta G = F_0 \left( 1 - \frac{\tau^{(\alpha)}}{\tau_0^{(\alpha)}} \right), \quad (4.1)$$

worin  $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$  die Gleitgeschwindigkeit und

$$\tau^{(\alpha)} = \beta^{(\alpha)} \cdot \sigma \nu^{(\alpha)} \quad (4.2)$$

die Schubspannung auf der  $\alpha$ -Gleitebene (Schmidsche Spannung) mit dem senkrechten Einheitsvektor  $\nu^{(\alpha)}$  und mit dem Einheitsvektor  $\beta^{(\alpha)}$  in der Gleitrichtung bezeichnen. Die Konstante  $\Gamma^{(\alpha)}$  hängt von Anfangsbedingungen ab.

Die Aktivierungsenergie  $F_0$  ist meistens viel größer als die mittlere kinetische Energie  $kT$ . Für Schubspannungen  $\tau^{(\alpha)}$ , die sehr nahe an den Vergleichsspannungen  $\tau_0^{(\alpha)}$  liegen, kann man dann näherungsweise schreiben

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \Gamma^{(\alpha)} \left( \frac{\tau^{(\alpha)}}{\tau_0^{(\alpha)}} \right)^m, \quad \alpha = 1, \dots, a, \quad m := \frac{F_0}{kT}. \quad (4.3)$$

Die Hochzahl  $m$  hat für Metalle den hohen Wert 300–500.

Die plastischen Eigenschaften des Gleitsystems und dessen Wechselwirkung mit anderen Gleitsystemen wird von der Vergleichsspannung  $\tau_0^{(\alpha)}$  wiedergegeben; die Inkremente dieser Spannung erfüllen die Gleichung

$$\dot{\tau}_0^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^a h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad (4.4)$$

wo  $h_{\alpha\beta}$  die **Verfestigungsmatrix** und  $a$  die Zahl der Gleitsysteme sind.

Die obigen Größen erlauben die Geschwindigkeit der plastischen Verzerrung für Einkristalle in der folgenden Gestalt zu schreiben:

$$\mathbf{L}^P = \sum_{\alpha=1}^a \dot{\gamma}^{(\alpha)} \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)} \otimes \boldsymbol{\nu}^{(\alpha)}. \quad (4.5)$$

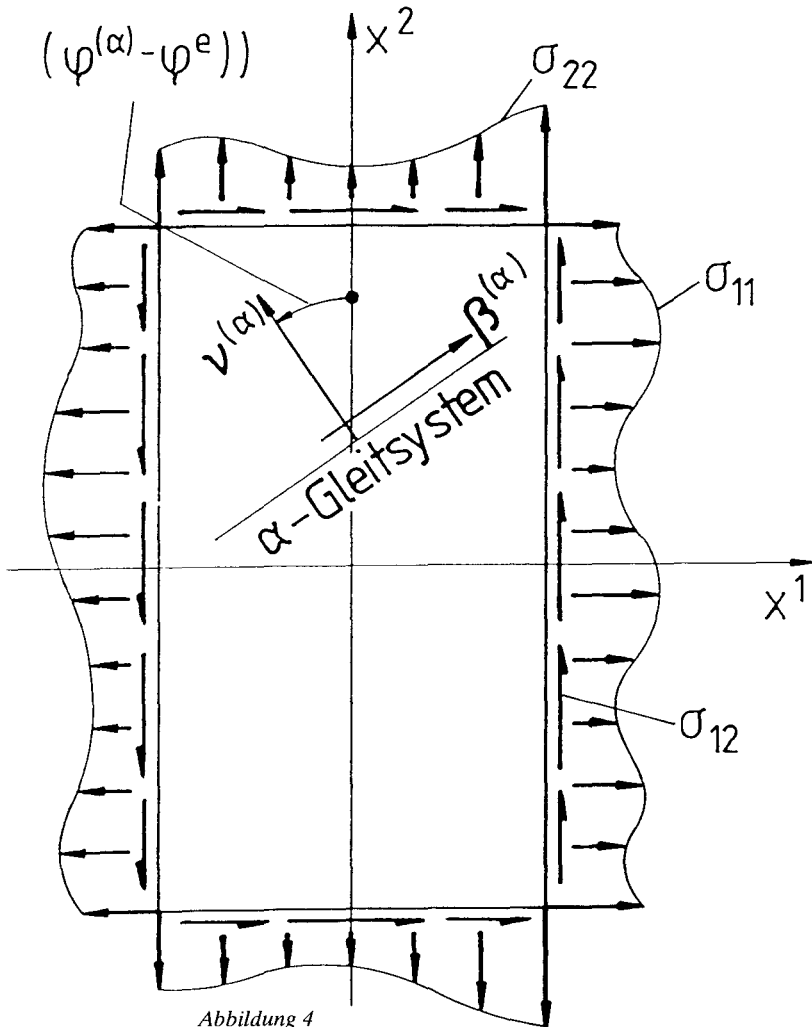


Abbildung 4

Es ist offensichtlich, daß die oben skizzierte Modellbildung relativ genaue Kenntnis der Mikrostruktur bedingt. Gleichzeitig ist diese Weise der Werkstoffbeschreibung weniger anschaulich als die im Rahmen der klassischen Plastizität. Zum Beispiel ist die Fließgrenze des Modells nicht explizit bekannt. Auch analytische Lösungen des Gleichungssystems sind praktisch ausgeschlossen.

Wir können jedoch relativ einfach numerische Lösungen erhalten. Beispielsweise für den zweidimensionalen Fall der Scheibe (Abbildung 4) bei Vernachlässigung der elastischen Verformung und unter isothermen Bedingungen haben die Gleichungen die Gestalt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} &= - \sum_{\alpha=1}^a \dot{\gamma}^{(\alpha)} \frac{1}{2} \sin 2 (\varphi^{(\alpha)} - \varphi^e), \\
 \frac{\partial v_2}{\partial x^2} &= - \frac{\partial v_1}{\partial x^1}, \\
 \frac{\partial v_1}{\partial x^2} &= \dot{\varphi}^e + \sum_{\alpha=1}^a \dot{\gamma}^{(\alpha)} \cos^2 (\varphi^{(\alpha)} - \varphi^e), \\
 \frac{\partial v_2}{\partial x^1} &= - \dot{\varphi}^e - \sum_{\alpha=1}^a \dot{\gamma}^{(\alpha)} \sin^2 (\varphi^{(\alpha)} - \varphi^e), \\
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} &= \varrho \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right), \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} &= \varrho \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Diese sechs Gleichungen, zusammen mit (4.3), (4.4) und

$$\tau^{(\alpha)} = - \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2 (\varphi^{(\alpha)} - \varphi^e) + \sigma_{12} \cos 2 (\varphi^{(\alpha)} - \varphi^e), \tag{4.7}$$

bestimmen die Spannungen  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ , die Geschwindigkeiten  $(v_1, v_2)$  und den Drehungswinkel  $\varphi^e$ . Die Anfangswinkel  $\varphi^{(\alpha)}$  für alle Gleitsysteme werden als bekannt angenommen.

Die FEM-Analyse dieser Gleichungen ist eine relativ einfache Aufgabe.

Es wird nun homogene Verformung mit zwei Gleitsystemen angenommen, deren Aktivierung das Erreichen der kritischen Spannung  $\tau_0^{(\alpha)}$  bedeutet. Unter Voraussetzung konstanter Verfestigungsmatrix  $h_{\alpha\beta}$  läßt sich die Gleichung (4.4) integrieren:

$$\begin{aligned}
 \tau_0^{(1)} &= \tau_0 [1 + \kappa \gamma^{(1)} + q \kappa \gamma^{(2)}], \\
 \tau_0^{(2)} &= \tau_0 [1 + \kappa \gamma^{(2)} + q \kappa \gamma^{(1)}].
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit

$$\kappa = 4, \quad q = 1, 1. \tag{4.9}$$

Die Fließgrenze  $\tau_Y/\tau_0$  und der Drehungswinkel  $\varphi^\circ$  für eine gezogene Platte werden in Abb. 5 als Funktionen der äußeren Verformung gezeigt.

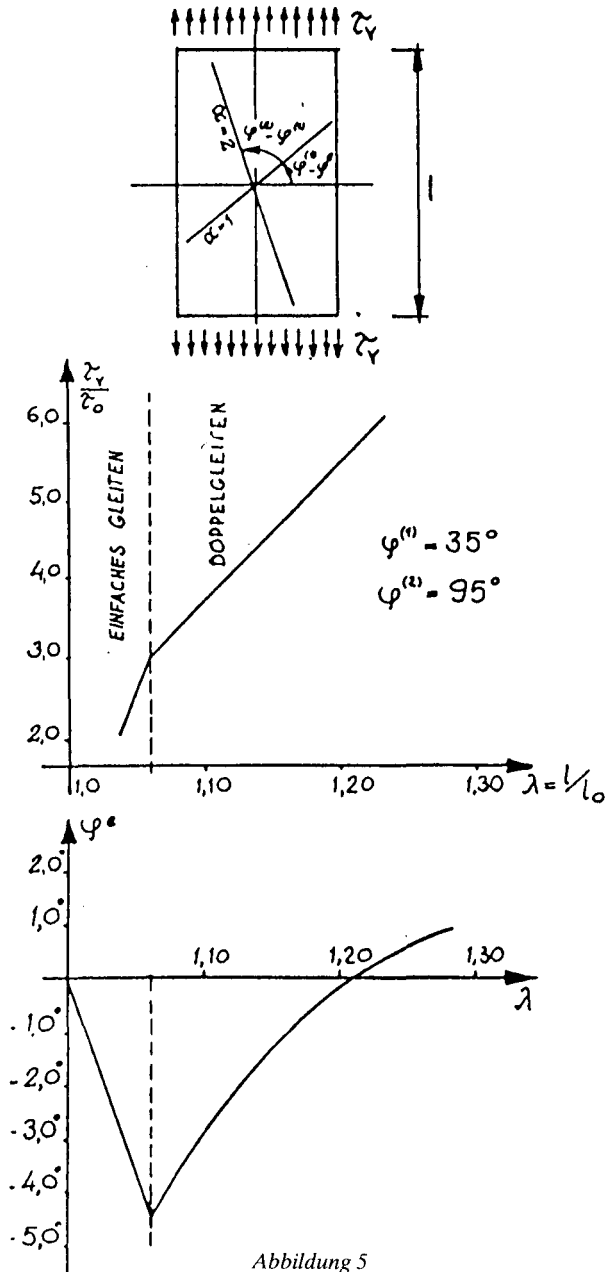


Abbildung 5

Man kann beweisen, daß die effektive Verfestigung der Platte sehr stark vom Wechselwirkungskoeffizienten  $q$  der Gleitsysteme abhängig ist. Auch ist es ersichtlich, daß die Aktivierung des zweiten Systems einen „over-shoot“-Effekt (die Rückdrehung) verursacht.

Von besonderem Interesse wäre die Untersuchung der Stabilität solcher homogenen Lösungen. Es wurde angedeutet [13], daß man die Entstehung der Scherbänder („shearbands“) mit Hilfe dieses Modells beschreiben kann. Die Ergebnisse auf diesem Gebiet stecken jedoch noch in den Kinderschuhen.

## 5. Strukturelle Vielkristallplastizität

Die Komplexität der strukturellen Plastizität der Vielkristalle folgt aus der Notwendigkeit, die unterschiedliche räumliche Orientierung der Körner berücksichtigen zu müssen. Diese mikrostrukturelle Eigenschaft ist verantwortlich für zweierlei Effekte:

- unterschiedliche plastische Verzerrung in verschiedenen Körnern als Folge der verschiedenen Orientierung der Gleitsysteme (vgl. (4.2)),
- Unstetigkeiten der Verformung und der Spannung auf Korngrenzen.

Der erste Effekt – die mikroskopische Heterogenität – wird meistens durch eine Vereinfachung der Körnereigenschaften berücksichtigt: entweder wird angenommen, daß die Verteilung der Spannung in den Körnern homogen ist (SACHS) oder daß die Verteilung der Verformung in den Körnern homogen ist (TAYLOR). Die beiden Modelle werden, mit einigen Verbesserungen, sehr häufig benutzt.

Die oben genannten Modelle vernachlässigen die Einflüsse der Korngrenzen. Das ist ein erheblicher Nachteil im Fall der mehrphasigen Legierungen, deren Phasengrenzen von besonderer Bedeutung für makroskopische Eigenschaften des Werkstoffes sind. Jedoch auch im Fall des einphasigen Werkstoffes können die Geschehnisse an den Korngrenzen nicht vernachlässigt werden. Zum Beispiel die Rückspannung und ihre Folge – Bauschinger-Effekt – kann ohne die Modellierung der Korngrenzen nicht beschrieben werden. Es folgt die

*8. Frage:* Wie soll man die Eigenschaften der Korngrenzen in die makroskopische Modellbildung einbeziehen?

Die Antwort auf diese Frage ist bis jetzt nur teilweise phänomenologisch formuliert.

Die strukturelle Plastizitätstheorie der Vielkristalle wird hauptsächlich für die Berechnung der Mikrostrukturentwicklung angewendet. Die theoretischen Ergebnisse für Texturen und plastische Anisotropie stimmen einigermaßen gut mit Messungen überein und Computerprogramme (z.B. Los Alamos Plasticity Programme – LAPP) stehen zur Verfügung. Viel weniger wurde auf diesem Gebiet für technische Randwertprobleme (z.B. Walzen oder Schmieden) unternommen. Die gezielte Umformung der mehrphasigen Legierungen bleibt bis heute theoretisch unbeschrieben.

Um die technischen Schwierigkeiten aufzuzeigen, werden jetzt die wesentlichen Schritte der sogenannten „self-consistent“-Methode beschrieben. Die makroskopischen Eigenschaften folgen aus Eigenschaften der Körner durch eine Volumenmittelungsprozedur. Mit Hilfe der Beziehungen (3.10) erhält man:

$$\frac{D\sigma}{Dt} = \mathbf{e} : \mathbf{D} + (\mathbf{L}^p \sigma + \sigma \mathbf{L}^{pT} - \mathbf{e} : \mathbf{D}^p), \quad (5.1)$$

wo

$$\begin{aligned} \frac{D\sigma}{Dt} &:= \dot{\sigma} - \mathbf{L}\sigma - \sigma \mathbf{L}^T + \sigma \text{ Spur } \mathbf{L}, \quad \mathbf{D}^p = \frac{1}{2} (\mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{pT}), \\ \mathbf{e} &:= 4 \varrho \mathbf{F}^e \mathbf{F}^e \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C}^e \partial \mathbf{C}^e} \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^{eT}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Anwendung der Beziehung (3.12) und der strukturellen Annahmen des Kapitels 4 erlauben dann die Tensoren  $\mathbf{L}^p$  und  $\mathbf{D}^p$  zu eliminieren und führen zur inkrementellen Gestalt der konstitutiven Gleichung

$$\frac{D\sigma}{Dt} = \mathbf{L} : \mathbf{D}, \quad (5.3)$$

wo  $\mathbf{L}$  ein Tensor vierter Ordnung ist, der die Eigenschaften der Mikrostruktur wiedergibt. Es ist angenommen, daß  $\mathbf{L}$  aus einem homogenen Anteil  $\mathbf{L}^0$  und einer Störung  $\delta \mathbf{L}$  besteht:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^0 + \delta \mathbf{L}. \quad (5.4)$$

Die mikroskopischen Verzerrungen müssen dann die folgende Integralgleichung von Dederichs und Zeller [14] erfüllen

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^0 + \int_V \Phi : \delta \mathbf{L} : \mathbf{L}(\mathbf{x}') dV', \quad (5.5)$$

wo  $\mathbf{L}^0$  die Lösung der Gleichgewichtsgleichung

$$\text{div} (\mathbf{L}^0 : \mathbf{L}^0) = 0 \quad (5.6)$$

ist und  $V$  ein charakteristisches Volumen der Mikrostruktur (klein im Vergleich mit makroskopischen Dimensionen) bezeichnet; andererseits bezeichnet der Doppelpunkt die Summierung nach zwei benachbarten Indizes. Der Tensor  $\Phi$  wird mit Hilfe der Greenschen Funktion  $\mathbf{G}$  des homogenen Körpers hergeleitet:

$$\Phi_{ijkl} = \frac{\partial^2 G_{jk}}{\partial x^i \partial x^l}; \quad (5.7)$$

die Einzelheiten dieser Prozedur können zum Beispiel in der Arbeit [15] nachgeschlagen werden.

Die numerische Auswertung dieses Modells (z.B. durch die iterative Lösung der Gleichung (5.5)) ergibt beispielsweise die Änderungen der makroskopischen Fließgrenze. Die Ergebnisse für zweiachsige Spannung in einer FCC-Vielkristallscheibe nach zyklischer Belastung und Entlastung (Bauschinger-Effekt) werden in Abbildung 6 [16] gezeigt. Die sehr komplizierte Gestalt dieser Grenze läßt bezweifeln, ob man solche Modellierung auf rein phänomenologischem Wege erreichen könnte.

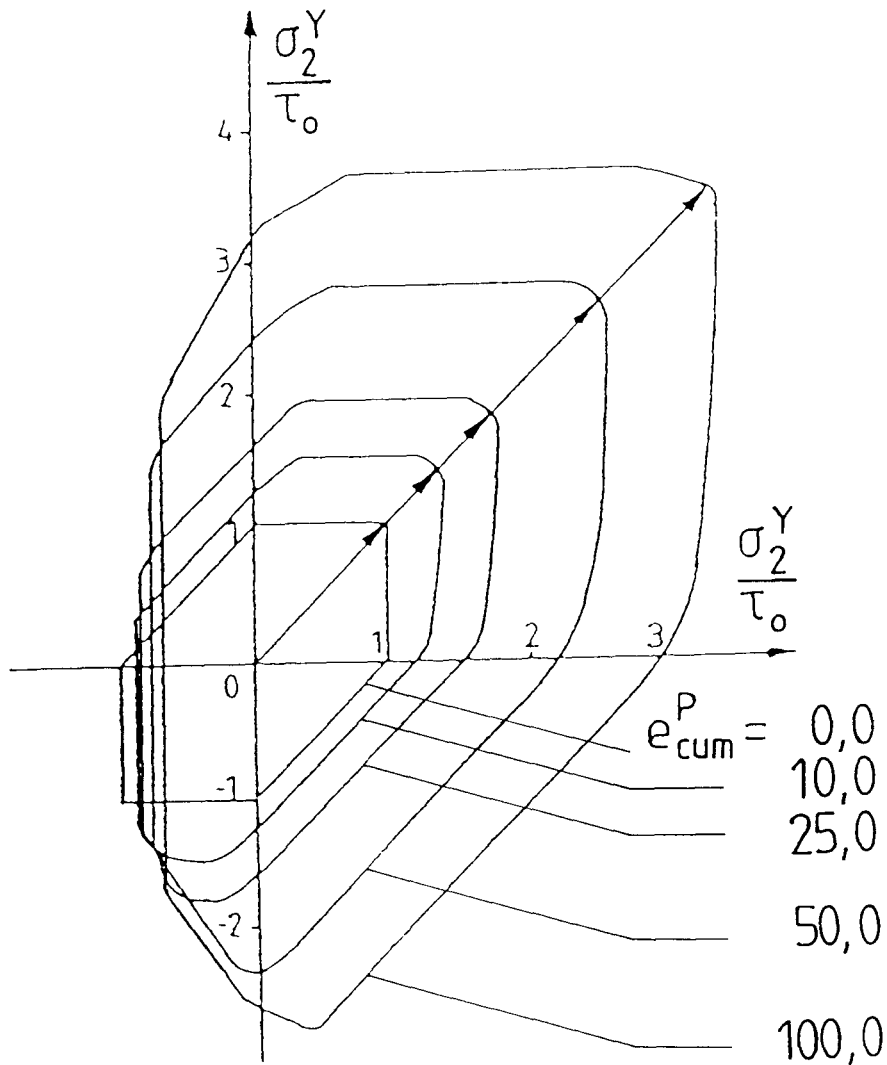


Abbildung 6

## 6. Schlußbemerkungen

Es ist offensichtlich, daß die letzten 65 Jahre nicht ganz verloren gegangen sind für den Fortschritt der Plastizitätstheorie. Trotzdem, weder die rasche Entwicklung der Metallkunde und deren Prüfmethoden noch die heutigen numerischen Methoden und Computertechniken erlauben, die einfachsten Probleme der Umformtechnik vollständig zu lösen. Es ist selbstverständlich, daß die Schwierigkeiten mit grundlegenden Begriffen, die wir in dieser Arbeit erörtert haben, nicht alle Probleme der modernen Plastizität ausschöpfen. Zum Beispiel führen die Temperaturabhängigkeit der Fließ-

grenze oder Viskosität und Kriechen sehr wesentlich zu Problemen bei der Modellbildung.

Die obigen offenen Fragen der Metallplastizität haben auch teilweise ihre Bedeutung im Fall anderer Werkstoffe. Man muß jedoch feststellen, daß, unabhängig von universellen Zweifeln dem Begriff der plastischen Verzerrung gegenüber, solche Materialien wie Kunststoffe ihre eigenen Probleme (z. B. Mikromechanismen der plastischen Verzerrung im Fall der Kettenstrukturen) besitzen.

### Literaturverzeichnis

- [1] Th. LEHMANN: Phänomenologische Plastizitätstheorie – ihre Grundlagen und Methoden. *Naturwissenschaften*, **74**, 225–234, 1987.
- [2] I. MÜLLER, K. WILMANSKI: A Model for Phase Transition in Pseudo-Elastic Bodies. *Il Nuovo Cimento*, **57B**, 2, 283–318, 1980.
- [3] K. WILMANSKI: A Microphysical Model of Crystallizing Polymers, in: D. R. AXELRAD, W. MUSCHIK (eds.): *Constitutive Laws and Microstructure*. Springer-Verlag, Berlin, 163–173, 1988.
- [4] H. LIPPMANN, O. MAHREHOLTZ: *Plastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [5] P. W. BRIDGMAN: Reflections on Thermodynamics. *Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences*, **82**, 301–309, 1953.
- [6] J. KESTIN, J. BATAILLE: Thermodynamics of Solids, in: *Continuum Models of Discrete Systems*. University of Waterloo Press, 99–147, 1980.
- [7] E. H. LEE: Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *J. Appl. Mech.*, **36**, 1–6, 1969.
- [8] K. WILMANSKI: Remarks on Rate – Type Monocrystal Plasticity. *Cont. Mech. Therm.*, 1989 (to appear).
- [9] J. KRATOCHVIL: Finite Strain Theory of Crystalline Elastic-Inelastic Materials. *J. Appl. Phys.*, **42**, 3, 1104–1108, 1971.
- [10] Y. F. DAFALIAS: The Plastic Spin. *J. Appl. Mech.*, **52**, 865–871, 1985.
- [11] J. KESTIN, Th. LEHMANN (eds.): Symposium on: „What is the correct form of the Gibbs equation for inelastic deformations in solid bodies“. General Discussion, Bochum, May 4–6, 1988.
- [12] U. F. KOCKS, A. S. ARGON, M. F. ASHBY: Thermodynamics and Kinetics of Slip, in: B. CHALMERS, J. W. CHRISTIAN, T. B. MASSALSKI (eds.): *Progress in Materials Science*, **19**, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [13] A. MOLINARI: Shear Band Analysis. *Solid State Phenomena*. Vol. 3 & 4, 447–468, 1988.
- [14] P. H. DEDERICHS, R. ZELLER: Variational Treatment of the Elastic Constants of Disordered Materials. *Z. Physik*, **259**, 103, 1973.
- [15] Ch. BERADAI, M. BERVEILLER, P. LIPINSKI: Plasticity of Metallic Polycrystals under Complex Loading Paths. *Int. J. Plasticity*, **3**, 143–162, 1987.
- [16] M. BERVEILLER, A. CARMOSOL, P. LIPINSKI: Plastic Behaviour and Texture Development of Metallic Polycrystals at Large Deformations. *Int. Workshop: Theoretical Methods in Texture Analysis*, Clausthal, 17–21. 3. 1986.